1. $\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Denklemi aşağıdaki gibi gruplandıralım.

$$\left(\frac{1}{x+2+\sqrt{5}}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+\sqrt{5}}\right)=0 \Rightarrow \frac{2x+2+\sqrt{5}}{x\left(x+2+\sqrt{5}\right)}+\frac{2x+2+\sqrt{5}}{(x+2)\left(x+\sqrt{5}\right)}=0$$

$\Rightarrow \left(2x+2+\sqrt{5}\right)\left(\dfrac{1}{x\left(x+2+\sqrt{5}\right)}+\dfrac{1}{(x+2)\left(x+\sqrt{5}\right)}\right)=0$. Burada $x\neq 0,\ x\neq -2,\ x\neq -\sqrt{5},\ x\neq -\left(2+\sqrt{5}\right)$

olmalıdır. $\left(2x+2+\sqrt{5}\right)\left(2x^2+2\left(2+\sqrt{5}\right)x+2\sqrt{5}\right)=0$. Buradan $2x+2+\sqrt{5}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ veya

$$2x^2+2\left(2+\sqrt{5}\right)x+2\sqrt{5}=0 \Rightarrow x^2+\left(2+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ve } x=-\frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

---

2. $xyz=1$ ise, $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+xz}=1$ eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm: Eşitlikteki 2. kesrin pay ve paydasını *x* ile, 3. kesrin pay ve paydasını *xy* ile çarpsak ve

$xyz=1$ şartını kullansak:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1$$

---

3. Son iki basamağı 02 olan doğal sayıların iki sayının kare farkı olarak yazılamayacağını ispatlayın.

Çözüm: Son iki basamağı 02 olan doğal sayıların iki sayının kare farkı olarak yazılabileceğini kabul edelim. O zaman $.......02=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ olur. Burada *a* ve *b* doğal sayılardır. Dört durum vardır. **1.** *a* ve *b* çift sayıdır. **2.** *a* çift, *b* tek sayıdır. **3.** *a* tek, *b* çift sayıdır. **4.** *a* ve *b* tek sayıdır. 2. ve 3. durumlarda $(a+b)$ ve $(a-b)$ ifadeleri tek sayıdır. Onların çarpımları da tek sayıdır. Demekki bu iki durumda da sayının son iki basamağı 02 olamaz. 1. ve 4. durumlarda $(a+b)$ ve $(a-b)$ ifadeleri çift sayıdır, yani çarpımları 4'e bölünür. Ama son iki basamağı 02 olan sayılar 4'e bölünmez. Bu dört durumda da sonu 02 ile biten sayıların iki doğal sayının karelerinin farkı olmayacağını gösterdik.

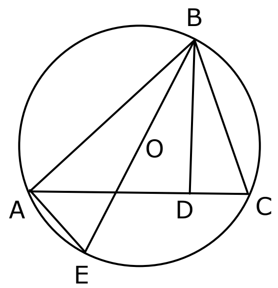
4. $x^2-\frac{\sqrt{85}}{4}x+1\frac{5}{16}=0$ denklemini çözmeden köklerinin küpleri farkını bulunuz.

Çözüm: Denklemin kökleri toplamı $x_1+x_2=\frac{\sqrt{85}}{4}$ ve kökleri çarpımı $x_1\cdot x_2=1\frac{5}{16}$ olur. Buradan

$\begin{cases}(x_1+x_2)^2=\frac{85}{16}\\ x_1\cdot x_2=\frac{21}{16}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=\frac{85}{16}\\ x_1\cdot x_2=\frac{21}{16}\end{cases}$. Buradan $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=4$ ve $\begin{cases}x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=\frac{85}{16}\\ 4x_1x_2=\frac{84}{16}\end{cases}$ elde edilir. Bu denklem sisteminden $(x_1-x_2)^2=\frac{1}{16}\Rightarrow x_1-x_2=\pm\frac{1}{4}$ olur. Bunlardan $x_1-x_2=\frac{1}{4}$ denklemleri sağlar. Elimizdeki eşitlikleri $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=4$ ve $x_1-x_2=\frac{1}{4}$ taraf tarafa çarparsak

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=4\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow x_1^3-x_2^3=1$.

5. Dar açılı bir üçgenin iki kenarının uzunlukları 20 cm ve 23,2 cm'dir. Bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı 14,5 cm ise, üçgenin üçüncü kenarının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm: Şekilde, $|AB|=23{,}2$ cm, $|BC|=20$ cm, $|BO|=14{,}5$ cm'dir.

$[BD]\perp[AC]$ ve *BE* çaptır. *EAB* ve *CDB* benzer üçgenlerdir.

$\frac{|BE|}{|BC|}=\frac{|AB|}{|BD|}\Rightarrow|BD|=\frac{20\cdot 23{,}2}{29}=16$ cm olur. Pisagordan $|AD|=16{,}8$ cm

ve $|DC|=12$ çıkar. Buradan $|AC|=|AD|+|DC|=16{,}2+12=28{,}8$ cm olur.